

Hà Nội, ngày 1 tháng 10 năm 2019

THÔNG BÁO

VỀ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN CẤP TRƯỜNG NĂM 2019

Vào tháng 4 hàng năm, kỳ thi Olympic Toán sinh viên toàn quốc được tổ chức nhằm khuyến khích sinh viên các trường Đại học và Cao đẳng say mê học tập nói chung và môn Toán nói riêng. Kể từ khi tham dự lần đầu tiên năm 1994 đến nay, có rất nhiều sinh viên trường Đại học Thủy Lợi đã tham dự và đoạt giải cao.

Để chuẩn bị cho kỳ thi Olympic Toán sinh viên toàn quốc lần thứ 28 tại Trường Đại học Sư phạm – Đại học Huế và tạo phong trào học tập cho sinh viên trong trường, bộ môn Toán học kết hợp với Phòng Chính trị và Công tác sinh viên tổ chức kỳ thi Olympic môn Toán cấp trường năm học 2019 - 2020.

Sau đây là một số thông tin về kỳ thi này:

**I. Ngày thi: 8h Chủ Nhật, ngày 03 tháng 11 năm 2019 (Địa điểm thi sẽ thông báo sau).
Sinh viên khóa 61 học GDQP sẽ thi tại cơ sở khu ĐH Phố Hiến.**

Danh sách dự thi Olympic Toán được gửi vào email của sinh viên ngày 25.10.2018.

II. Nội dung thi (5 Câu - thời gian 150 phút) :

1) Hàm số: giới hạn, liên tục, cực trị, các định lý về giá trị trung bình.
2) Tích phân: Tính tích phân, bất đẳng thức tích phân. 3) Phương trình, hệ phương trình.
4) Đa thức, dãy số, giải tích tổ hợp. 5) Bài toán áp dụng thực tế, suy luận logic.
Các em tham khảo đề thi Olympic Toán cấp trường năm 2009, 2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018 ở phần tiếp theo sau.

III. Đăng ký thi: từ ngày 1/10/2019 đến ngày 20/10/2019

+ Sinh viên khóa 61 đăng ký theo lớp học Giải tích hàm một biến, Giải tích 1, Toán cao cấp 1.

+ Sinh viên các khóa 60, 59, 58 gửi về địa chỉ email nhtho@tlu.edu.vn, ghi rõ : **Họ tên, mã số sinh viên, lớp theo khoa, lớp Nhập môn xác suất thống kê hoặc Xác suất thống kê (nếu đang học, để được cộng điểm quá trình).**

+ **Chú ý:** Do số phòng chuẩn bị vừa đủ nên chỉ các sinh viên đăng ký đúng hạn và có tên trong danh sách bộ môn Toán thông báo mới được dự thi.

IV. Khen thưởng

+ Thưởng điểm quá trình cho các sinh viên khóa 61 một trong các môn Giải tích hàm nhiều biến, Giải tích 2, Toán CC2 và khóa 60 môn Nhập môn xác suất thống kê hoặc Xác suất thống kê. Nếu tham gia thi (cộng 1 điểm); đạt giải khuyến khích (cộng 2 điểm); đạt giải Nhất, Nhì, Ba (cộng 3 điểm) theo quy định của bộ môn Toán.

+ Các sinh viên có kết quả tốt được nhận giải thưởng của trường.

+ Bộ môn chọn 25-35 em vào 2 đội dự tuyển thi Đại số và Giải tích theo nguyện vọng của các em đã đăng ký. Nếu tham gia tích cực, đầy đủ các buổi tập huấn sẽ được thưởng điểm quá trình (từ 1-3 điểm) của các môn học Toán học kỳ 2 năm 2019-2020. Sau 2 tháng sẽ tuyển chọn mỗi đội 5 em.

+ Sinh viên thi Olympic toàn quốc được giải Ba trở nên được thưởng 2 điểm 10 chọn trong các môn Toán. Giải khuyến khích được 2 điểm 9, còn lại được 2 điểm 8.

V. Kết quả Olympic Toán Toàn quốc của sinh viên ĐH Thủy Lợi từ 2010-2019

Giải Nhất: 03

Giải Nhì: 10

Giải Ba: 37

Giải khuyến khích: 09

CÁC EM HÃY TỰ TIN, NHIỆT TÌNH THAM GIA KỲ THI OLYMPIC TOÁN

Câu 1 (a) Chứng minh rằng với mọi $x_1, x_2 \in (e, +\infty)$ mà $x_1 < x_2$, ta có :

$$\frac{\ln x_1}{x_1} > \frac{\ln x_2}{x_2}.$$

(b) Chứng minh bất đẳng thức: $2009^{2010} > 2010^{2009}$.

Câu 2 Cho $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện sau

$$\begin{cases} f(1) = \frac{2009}{6} \\ \frac{f(1)}{1} + \frac{f(2)}{2} + \dots + \frac{f(n)}{n} = \frac{n+1}{2} f(n) \end{cases}$$

(a) Hãy biểu diễn $f(n)$ qua $f(n-1)$

(b) Tìm giới hạn $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} (2009 + n)f(n)$

Câu 3 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 6x_6 = 1 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 5x_6 + 6x_1 = 2 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 4x_6 + 5x_1 + 6x_2 = 3 \\ x_4 + 2x_5 + 3x_6 + 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 4 \\ x_5 + 2x_6 + 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 5 \\ x_6 + 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 6 \end{cases}$$

Câu 4 Cho các hàm số $f(x)$, $g(x)$ dương, liên tục, f tăng, g giảm trên $[0, 1]$.

Chứng minh rằng :
$$\int_0^1 f(x)g(x)dx \leq \int_0^1 f(x)g(1-x)dx$$

Câu 5 (a) Cho đa thức $f(x) = x^{2009} + ax^2 + bx + c$.

Tìm các số thực a, b, c sao cho $f(x)$ chia hết cho $g(x) = x - 2$ và $f(x)$ chia cho $h(x) = x^2 - 1$ thì dư $r(x) = 2x$.

(b) Trên bảng có 2009 dấu trừ và 2010 dấu cộng tại các vị trí bất kỳ. Ta thực hiện mỗi lần xóa hai dấu bất kỳ thì viết thêm vào đó một dấu cộng nếu xóa hai dấu giống nhau hoặc một dấu trừ nếu xóa hai dấu khác nhau. Hỏi sau khi thực hiện 4018 lần xóa như trên thì trên bảng còn lại dấu gì?

Câu 1 (a) Chứng minh rằng: $e^t > 1 + t, \quad \forall t > 0$.

(b) Chứng minh rằng: $I = \int_0^{\pi} e^{\sin^2 x} dx > \frac{3\pi}{2}$.

Câu 2 Cho $a > 0$. Xét dãy số $\{u_n\}$ được xác định bởi:

$$u_1 = \sqrt{a}; u_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}}; u_3 = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a}}}; \dots u_n = \sqrt{a + \underbrace{\sqrt{a + \dots + \sqrt{a}}}_{n \text{ căn số}}}.$$

(a) Chứng minh rằng dãy $\{u_n\}$ là dãy số dương, tăng và bị chặn trên.

(b) Tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Câu 3 Cho ba số a, b, c thỏa mãn:
$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ a^3 + b^3 + c^3 = 1 \end{cases}$$

Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta luôn có: $a^n + b^n + c^n = 1$.

Câu 4 Tính tích phân: $I = \int_0^{\pi/2} [\cos^2(\sin x) + \sin^2(\cos x)] dx$.

Câu 5 (a) Cho các đa thức với hệ số thực $f(x), g(x)$ thỏa mãn:

$$F(x) = f(x^{2010} + 2009) + x.g(x^{2010} + 2009) \text{ chia hết cho } x^2 + x + 1.$$

Gọi α, β là hai nghiệm phức của phương trình $x^2 + x + 1 = 0$. Hãy chứng minh rằng $\alpha^3 = \beta^3 = 1 = \alpha^{2010} = \beta^{2010}$; từ đó suy ra rằng

$$f(2010) = g(2010) = 0.$$

(b) Bạn An có 3 mảnh giấy. Từ 3 mảnh giấy này, bạn An lấy ra một mảnh rồi xé nó thành 3 mảnh. Trong các mảnh giấy có được An lại lấy ra một mảnh rồi lại xé thành 3 mảnh nhỏ hơn. Cứ như thế sau một thời gian An dừng lại và đếm được 120 mảnh giấy. Bạn An đã đếm đúng hay sai? Vì sao?

Câu 1 (a) Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $[-a; a]$, chứng minh rằng:

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)]dx$$

(b) Tính tích phân: $I = \int_{-1}^1 \frac{x^4 + \sin x}{1+x^2} dx.$

Câu 2 Cho dãy số $\{u_n\}$ được xác định bởi:
$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{2n+2}{n}u_n - \frac{n+2}{n}, \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$$

(a) Chứng minh rằng: $u_n = n.2^n + 1, n = 1, 2, 3, \dots$

(b) Hãy tìm giới hạn: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n (2012n + 2011)}{u_n}.$

Câu 3 Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn

$$\frac{x}{y+z+2011} = \frac{y}{x+z+2011} = \frac{z}{x+y-4022} = x+y+z$$

(a) Chứng minh rằng nếu x, y, z khác 0 thì $x+y+z = \frac{1}{2}$

(b) Tìm ba số x, y, z .

Câu 4 (a) Cho hàm số liên tục $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(0) < 1 < f(1)$. Khi đó chứng tỏ rằng phương trình sau luôn luôn có nghiệm trong $(0; 1)$

$$f(x) - \sin^{2012} x - \cos^{2012} x = 0.$$

(b) Tìm hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(\ln x) = x, \forall x > 0$ và $f(1) = 1$.

Câu 5 (a) Tìm hệ số của x^2 trong khai triển đa thức sau:

$$P_n(x) = (1+x)(1+2x)(1+3x)\dots(1+nx) \quad \text{với } n \geq 1$$

(b) Trong một cuộc thi Toán, tổng số điểm của Bình và Đông bằng tổng số điểm của An và Chi. Nếu tính tổng số điểm của An và Bình thì sẽ vượt trội hơn tổng số điểm hai người kia. Ngoài ra số điểm của Đông lớn hơn tổng số điểm của Bình và Chi. Hãy xác định thứ hạng của bốn người theo thứ tự điểm từ cao tới thấp, biết rằng điểm thi là số không âm.

Câu 1 Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $[0, 1]$ và $\int_x^1 f(t)dt \geq \frac{1-x^2}{2}$ với $\forall x \in [0, 1]$.

Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Chứng minh rằng:

$$(a) \quad \int_0^1 xf(x)dx + \int_0^1 F(x)dx = F(1).$$

(b) $\int_0^1 xf(x)dx \geq \frac{1}{3}$

Câu 2 Cho dãy số $\{u_n\}$ thỏa mãn các điều kiện sau

$$\begin{cases} u_1 = \frac{2012}{6} \\ \frac{u_1}{1} + \frac{u_2}{2} + \dots + \frac{u_n}{n} = \frac{n+1}{2} u_n \end{cases}$$

(a) Hãy biểu diễn u_n qua u_{n-1} .

(b) Tìm công thức tổng quát của u_n .

Câu 3 Giải hệ phương trình

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n = 1 \\ x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n = \frac{1+x_1}{2} \\ \dots\dots\dots \\ x_n = \frac{1+x_1+\dots+x_{n-1}}{n} \end{array} \right.$$

Câu 4 Tính tích phân $I = \int_0^1 \ln(2x - 1 + \sqrt{4x^2 - 4x + 2}) dx$

Câu 5 (a) Cho $f(x) = \frac{2}{4^x + 2}$. Tính giá trị biểu thức

$$A = f\left(\frac{1}{2013}\right) + f\left(\frac{2}{2013}\right) + f\left(\frac{3}{2013}\right) + \dots + f\left(\frac{2012}{2013}\right)$$

(b) Ba bạn An, Bình và Chinh bắt đầu công việc mới của họ vào cùng một ngày. Lịch làm việc của An là làm liền 5 ngày rồi nghỉ một ngày. Lịch của Bình là làm liền 12 ngày rồi nghỉ 3 ngày. Còn lịch của Chinh là làm liền 15 ngày rồi nghỉ 5 ngày. Hỏi trong 2012 ngày làm việc, có bao nhiêu ngày cả ba người nghỉ cùng nhau? Bao nhiêu ngày chỉ có 2 người cùng nghỉ?

Câu 1 Xét hàm số $f(x) = x^2 - 4026x + 2013.2014$, $x \in \mathbb{R}$.

Định nghĩa $f^n(x) = f(f^{n-1}(x))$ với $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Chứng minh rằng: $f^{2013}(x) = 2013 + (x - 2013)^{2^{2013}}$

b) Hãy tính tích phân sau: $I = \int_0^1 f^{2013}(x) dx$.

Câu 2 a) Chứng minh dãy số $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{2} \end{cases}$ là dãy số giảm và bị chặn dưới.

b) Cho dãy $\{x_k\}$ xác định từ hệ thức:

$$x_1 = 1, \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} = \frac{1}{nx_n}; \quad n = 2, 3, \dots \quad \text{Tính } x_{2013}.$$

Câu 3 Giải hệ phương trình sau với a_1, a_2, a_3, a_4 là các số thực khác nhau.

$$\begin{cases} |a_1 - a_2|x_2 + |a_1 - a_3|x_3 + |a_1 - a_4|x_4 = 1 \\ |a_2 - a_1|x_1 + |a_2 - a_3|x_3 + |a_2 - a_4|x_4 = 1 \\ |a_3 - a_1|x_1 + |a_3 - a_2|x_2 + |a_3 - a_4|x_4 = 1 \\ |a_4 - a_1|x_1 + |a_4 - a_2|x_2 + |a_4 - a_3|x_3 = 1 \end{cases}$$

Câu 4 Tìm hàm số $f(x)$ liên tục sao cho $f(x) = x^2 - \int_0^2 f(x) dx$

Câu 5 (a) Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \\ xyz = 4 \end{cases}$

Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{xy + z - 1} + \frac{1}{yz + x - 1} + \frac{1}{zx + y - 1} = \frac{-1}{(x-1)(y-1)(z-1)} = k \quad \text{và tính } k.$$

(b) Trong một buổi sinh hoạt của câu lạc bộ có 100 người tham dự. Trong đó có 85 người mặc áo đỏ, 80 người mang giày đen, 75 người đeo đồng hồ và 70 người đội nón. Hỏi có ít nhất bao nhiêu người thỏa mãn tất cả các điều kiện trên?

Câu 1 (a) Chứng minh rằng với $n \geq 0$, tích phân sau không phụ thuộc vào n

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos^2(\sin^n x) + \sin^2(\cos^n x)] dx$$

(b) Cho hàm số $f(x) = x(x-1)(x-2)\dots(x-2014)$. Tính $f'(2014)$.

Câu 2 (a) Cho dãy số: $u_1 = 1, u_2 = 2 + u_1, u_3 = 3 + u_2, \dots, u_k = k + u_{k-1}, \dots$

Chứng minh rằng: $u_k = \frac{k(k+1)}{2}$

(b) Đặt $S_k = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}} + \dots + \frac{1}{1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{u_{k-1}} + \frac{1}{u_k}}$.

Chứng minh rằng: $S_{2014} > 1010$

Câu 3 Giải hệ phương trình

[illegible]

Câu 4 (a) Tìm đa thức bậc nhỏ nhất đạt giá trị cực đại là 6 tại $x=1$ và giá trị cực tiểu là 2 tại $x=3$.

(b) Tìm hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f^3(x) = \int_0^x [f^3(t) + 3f'^2(t)f(t) - f'^3(t)] dt + 8$$

Câu 5 (a) Cho $x^2 + x + 1 = 0$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{x} = x^2$.

Từ đó tính giá trị của biểu thức:

$$A = x + x^2 + \dots + x^{2014} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \dots + \frac{1}{x^{2014}}$$

(b) Trong cuộc thi chạy giao hữu giữa hai đội, mỗi đội 5 người. Vận động viên nào về thứ n thì đội đó được n điểm và không có vận động viên nào đồng hạng. Đội nào ít điểm hơn sẽ thắng. Hỏi đội thắng có thể nhận được điểm là các giá trị nào?

Câu 1 (a) Tính nguyên hàm $I = \int \frac{x \ln x + (x-1) \ln(x-1)}{x(x-1)} dx$

(b) Giả sử $f(x)$ là hàm liên tục và dương với mọi $x > 0$.

Chứng minh rằng $g(x) = \frac{\int_0^x t f(t) dt}{\int_0^x f(t) dt}$ là hàm đồng biến trong khoảng $(0, +\infty)$.

Gợi ý: Nếu $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ thì $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$

Câu 2 Cho $a \in [0;1]$ và dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi $\begin{cases} x_1 = a \\ x_{n+1} = 2x_n(1-x_n), \forall n \geq 1 \end{cases}$

(a) Chứng minh rằng $x_n \leq \frac{1}{2}$ với mọi $n > 1$.

(b) Chứng minh dãy $\{x_n\}$ hội tụ và tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

Câu 3 Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 - x_6 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 - x_6 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 - x_6 = 1 \\ -2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 - x_6 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 + 2x_6 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 + x_6 = 1 \end{cases}$$

Câu 4 Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$ thỏa mãn $xf(x) + \frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right) \leq 2$.

Chứng minh rằng $\int_{1/2}^2 f(x) dx \leq 2 \ln 2$.

Câu 5 (a) Tìm đa thức $P(x)$ có bậc lớn hơn 2 và thỏa mãn $P(2x) = P'(x).P''(x)$.

(b) Hai bạn A và B tiến hành một trò chơi với 2015 hạt đậu, theo cách lấy luân phiên nhau. Mỗi lần có thể lấy khỏi đồng hạt đậu 1, 2 hoặc 3 hạt. Người nào lấy cuối cùng hết đậu trong đồng thì người đó thắng. Tìm chiến thuật của người luôn thắng? Khi nào A là người lấy trước mà B là người thắng, nếu B biết chiến thuật đó?

Câu 1 (a) Sử dụng phép đổi biến $x = a - y$ với a thích hợp để tính tích phân sau

$$I = \int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)} + \sqrt{\ln(x+3)}} dx$$

(b) Cho đa thức $P(x)$ thỏa mãn điều kiện $P(1) = -P(0)$.

Chứng minh rằng
$$\int_0^1 P''(x)x(x-1)dx = 2 \int_0^1 P(x)dx$$

Câu 2 Cho dãy số $\{u_n\}$ xác định bởi công thức $u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ với $n = 2, 3, 4, \dots$

Rút gọn tổng $S = u_2 + u_3 + \dots + u_n$. Từ đó chứng minh $\lim_{n \rightarrow \infty} S = \ln \frac{1}{2}$.

Câu 3 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{1}{x+y} + \frac{2}{y+z} - \frac{3}{z+x} = 1 \\ \frac{1}{x+y} - \frac{2}{y+z} + \frac{3}{z+x} = 1 \\ -\frac{1}{x+y} + \frac{2}{y+z} + \frac{3}{z+x} = 1 \end{cases}$$

Câu 4 Tìm hàm số $f(x)$ có giá trị lớn hơn 1 và xác định với mọi $x > 0$, biết rằng

$$\left(\frac{f(x)+1}{f(x)-1} \right)^2 = \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}.$$

Câu 5 (a) Trong mặt phẳng, một tập hợp gồm 8 đường thẳng song song cắt một tập hợp gồm n đường thẳng song song theo phương khác, tạo thành 420 hình bình hành (nhiều hình có thể phủ hình kia). Hãy tính n .

(b) Có 4 người đàn ông A, B, C, D cần đi qua một chiếc cầu rất yếu trong đêm tối. Không may là chỉ có một cây đuốc, không có đuốc thì không thể qua cầu được. Thời gian qua cầu của A, B, C, D lần lượt là: 1 phút, 2 phút, 7 phút và 10 phút. Mỗi lượt đi chỉ được nhiều nhất 2 người và theo thời gian của người đi nhiều hơn. Hỏi thời gian ngắn nhất để 4 người đàn ông qua cầu là bao lâu?



Ảnh minh họa.

Câu 1 (a) Tìm nguyên hàm $I = \int \frac{dx}{\frac{x}{e^2 + e^x}}$.

(b) Cho hàm số $f(x)$ khả vi và $f(0) = 0$. Sử dụng định nghĩa đạo hàm, chứng minh rằng $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(2x) + f(3x) + \dots + f(nx)}{x} = \frac{n(n+1)}{2} f'(0)$

Câu 2 Cho dãy số x_n thỏa mãn

$$\begin{cases} x_1 = 2017 \\ \frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{2} + \dots + \frac{x_n}{n} = (n + 2018)x_{n+1} \end{cases} \quad \text{Tìm giới hạn } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

Câu 3 Cho các số a, b, c, x, y, z thỏa mãn

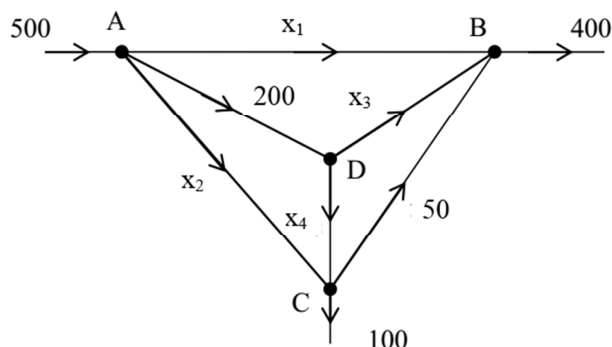
$$\begin{cases} x = by + cz \\ y = ax + cz \\ z = ax + by \end{cases}, \quad \text{với } x + y + z \neq 0 \text{ và } a, b, c \neq -1.$$

Chứng minh rằng $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} = 2$.

Câu 4 Cho hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 4} + x - 2}{\sqrt{x^2 + 4} + x + 2}$. Chứng tỏ rằng $f(x)$ là hàm lẻ.

Câu 5 (a) Cho đa thức $P(x)$ thỏa mãn $P(3x) - P(x) = 16x^2 - 10x$. Tìm các hệ số a, b, c để hàm số $f(x) = P(x) - (ax^2 + bx + c)$ thỏa mãn $f(3x) = f(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

(b) Cho mạng lưới giao thông một chiều như hình vẽ, với x_1, x_2, x_3, x_4 là lưu lượng xe đi trên các con đường. Số xe đi vào nút A là 500 và đi ra nút B, C lần lượt là 400, 100. Tại mỗi nút của mạng lưới, luôn có tổng lưu lượng xe đi vào bằng xe đi ra. Ngoài ra lưu lượng trên đường AB gấp 4 lần lưu lượng trên đường CD. Tìm lưu lượng xe đi trên mỗi con đường.



Thời gian làm bài : 150 phút.

(b) Cho một mảng hình vuông gồm 4×4 ô vuông. Tại mỗi ô, người ta điền ngẫu nhiên một trong ba số: -1 , 0 hoặc 1 . Tính tổng tất cả các ô theo hàng, theo cột và theo hai đường chéo. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất hai tổng có giá trị bằng nhau.